I. MOMENTLERE DAYALI ÖLÇÜLER

Genel olarak k sabit bir sayıyı göstermek üzere $E(X-k)^r$ şeklinde tanımlanan beklenen değere X - t.d. nin k'ya göre r. momenti denir. Momentler genel olarak üç grupta incelenir.

1- Orjine göre momentler: Başlangıç ($k=0$ için) (sıfır) noktasına göre momentler olarak da adlandırılırlar. r, moment derecesini göstermek üzere başlangıç noktasına göre r. nci moment;

X, t.d. kesikli ise $m_r = E(X^r) = \sum_{R_X} x^r . p(x)$

$r = 0, 1, \ldots$

X, t.d. sürekli ise $m_r = E(X^r) = \int_{R_X} x^r . f(x) . dx$

Orjine göre bazı momentler;

$r=0$ için $m_0 = 1$

$r=1$ " $m_1 = E(X)$

$r=2$ " $m_2 = E(X^2)$.

2- Herhangi bir a noktasına göre momentler;

Bir t.d. nin a noktasına göre momenti, bu t.d. nin a ile farkının kuvvetlerinin beklenen değeridir ve μ_r ile gösterilir.

$$\mu_r = E(X-a)^r$$

X - t.d. kesikli ise $\mu_r = \sum_{R_X} (x-a)^r . p(x)$

X - t.d. sürekli ise $\mu_r = \int_{R_X} (x-a)^r . f(x) . dx$

şeklinde hesaplanır.

3- Aritmetik ortalamaya göre momentler:

Bir X t.d. nin kendi ortalamasından sapmasının kuvvetlerinin beklenen değeridir

$$\mu_r = E(X-\mu)^r$$

formülü ile ifade edilir.

Ortalamaya göre momentleri, başlangıç (orjine) noktasına göre momentler cinsinden yazabiliriz.

$$E(X) = \mu = m_1$$

$$\mu_1 = E(X-\mu) = E(X) - \mu = m_1 - m_1 = 0 \,//$$

$$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2.X.\mu + \mu^2)$$
$$= E(X^2) - 2E(X).\mu + \mu^2$$
$$= m_2 - 2.m_1.m_1 + m_1^2$$
$$= m_2 - m_1^2 = \sigma^2 \,//$$

(ortalama etrafındaki ikinci moment varyanstır.)

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = E(X^3 - 3X^2.\mu + 3.X.\mu^2 - \mu^3)$$
$$= E(X^3) - 3E(X^2).\mu + 3.E(X).\mu^2 - \mu^3$$
$$= m_3 - 3.m_2.m_1 + 3.m_1.m_1^2 - m_1^3$$
$$= m_3 - 3.m_2.m_1 + 2m_1^3 \,//$$

Bu şekilde devam edilirse, başlangıca göre momentlerden ortalamaya göre momentlere geçiş için

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = E\left[\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}.X^i.(-\mu)^{r-i}\right]$$
$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i}.m_i.(-\mu)^{r-i}$$

* binom formülü kullanılır.

Tersi durumda ortalama etrafındaki momentlerden de başlangıç noktasındaki momentlere geçiş için aşağıdaki dönüşüm yapılır:

$$m_r = E(X^r) = E[(X-\mu)+\mu]^r \text{ yazılır,}$$

$$= E\left[\sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (X-\mu)^i \cdot \mu^{r-i}\right],$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} \mu_i \cdot \mu^{r-i} \quad // \text{ olur.} \qquad \mu_i = E(X-\mu)^i$$

Buradan; $m_1 = \mu + \underbrace{\mu_1}_{=0} = \mu$

$E(X-\mu)=0$

,

$m_2 = \mu^2 + \mu_2$

$m_3 = \mu_3 + 3\mu_2 \cdot \mu + \mu^3$

bulunur. Bu tür momentler teorik amaçlar için faydalıdır. Momentlerin bazıları istatistiksel dağılımlar için kullanılırlar.

Momentlerle ilgili Dağılım ölçüleri:

* 1- Değişim katsayısı;

$$\boxed{D.K = \frac{\sigma}{\mu}} = \beta$$

2- Çarpıklık katsayısı; Bir t.d. nin olasılık yoğunluk fonksiyonunun grafiğinin ortalamaya göre durumunun bir ölçüsüdür (simetrikliğinin) ve

$$\boxed{\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}}$$

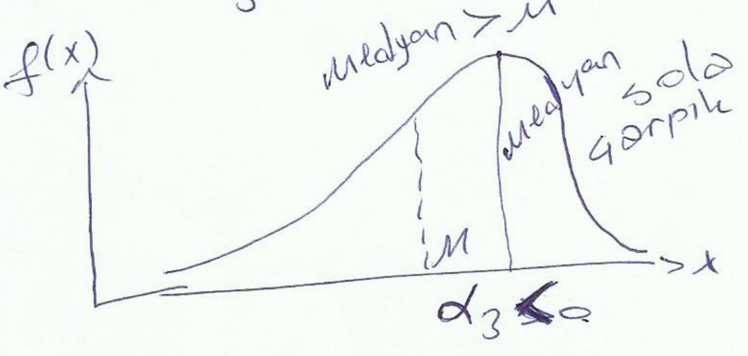
olarak tanımlanır.

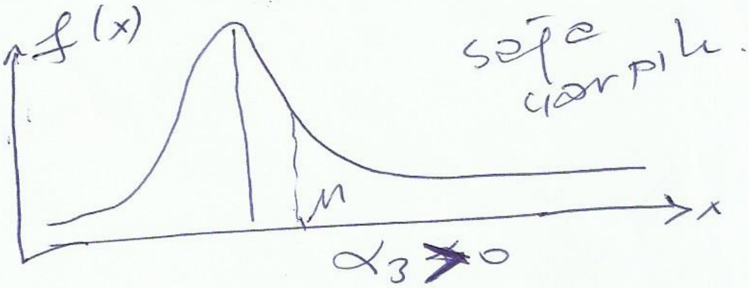
Hesaplama sonucunda,

- $\alpha_3 = 0$ ise fonksiyonun grafiği ortalamaya göre simetrik,

- $\alpha_3 > 0$ ise grafik sağa çarpık,

- $\alpha_3 < 0$ ise sola çarpıktır denir.





3- Basıklık Katsayısı; Bir t.d. nin o.y.f. nun yatay eksene göre durumunun bir ölçüsü olarak kullanılır ve

$$\boxed{\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3}$$

olarak tanımlanır.

- $\alpha_4 = 0$ ise basıklık normal
- $\alpha_4 > 0$ " (normale göre) sivri bir grafik
- $\alpha_4 < 0$ " " basık bir grafik.

ÖRNEK: X, t.d. nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{56}(x+3) & ; \quad 0 < x < 8 \\ 0 ; & \quad d.h. \end{cases}$$

veriliyor.

a.) m_1, m_2 ve M_3'ü bulunuz?

b.) $E(x)$, $V(x)$ ve σ'yı bulunuz?

c.) β, α_3 ve α_4 katsayılarını bulunuz?

Çözüm : Sıfır civarındaki birinci moment, X t.d. sürekli olduğu için,

a.) $m_1 = E(X) = \int_{R_X} x \cdot f(x) \cdot dx$

$$= \int_0^8 x \cdot \frac{1}{56} \cdot (x+3) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^8$$

$$= \frac{1}{56} \cdot \left(\underset{(2)}{\frac{512}{3}} + \underset{(3)}{\frac{192}{2}} \right) = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{1600}{6} \right) = 4{,}76$$

$$m_2 = E(X^2) = \int_0^8 x^2 \cdot \frac{1}{56} \cdot (x+3) \cdot dx = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{x^4}{4} + x^3 \right) \Big|_0^8$$

$$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{4096}{4} + 512 \right) = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{6144}{4} \right) = 27{,}43$$

$$m_3 = E(X^3) = \int_0^8 x^3 \cdot \frac{1}{56} \cdot (x+3) \cdot dx = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{x^5}{5} + \frac{3}{4} \cdot x^4 \right) \Big|_0^8$$

$$= \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{32.768}{5} + \frac{12.288}{4} \right) = \frac{1}{56} \cdot \left(\frac{192.512}{20} \right)$$

$$= 171{,}89$$

$$\mu_3 = E(X-\mu)^3 = m_3 - 3 m_1 \cdot m_2 + 2 m_1^3$$

$$= (171{,}89) - 3 \cdot (4{,}76) \cdot (27{,}43) + 2 \cdot (4{,}76)^3 = -4{,}1$$

b.) $E(X) = \mu = m_1 = 4{,}76$

$$V(X) = E(X-\mu)^2 = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2)$$

$$= m_2 - m_1^2 = (27{,}43) - (4{,}76)^2 = 4{,}77$$

$$\Rightarrow \sigma = 2{,}18$$

c.) $D.K. = \beta = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{2{,}18}{4{,}76} = 0{,}45$

Çarpıklık $\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{-4{,}1}{(2{,}18)^3} = \frac{-4{,}1}{10{,}36} = -0{,}39 < 0$

Dağılım sola çarpık.

Basıklık katsayısı

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

burada ortalama ~~etrafındaki~~ 4. moment,

$$\mu_4 = E(x-\mu)^4 = E(x^4 - 4x^3\mu + 6x^2\mu^2 - 4x\mu^3 + \mu^4)$$

$$= E(x^4) - 4\mu E(x^3) + 6\mu^2 E(x^2) - 4\mu^3 E(x) + \mu^4$$

$$= m_4 - 4 m_1 m_3 + 6 m_1^2 m_2 - 4 m_1^3 \cdot m_1 + m_1^4$$

$$\Rightarrow \mu_4 = m_4 - 4 m_1 m_3 + 6 m_1^2 m_2 - 3 m_1^4$$

burada $m_4 = E(x^4) = \int_0^8 x^4 \frac{1}{56}(x+3)\,dx$

$$= \frac{1}{56}\left(\frac{x^6}{6} + \frac{3}{5}x^5\right)\Big|_0^8$$

$$= \frac{1}{56}\left(\frac{262144}{6} + \frac{98304}{5}\right)$$

$$m_4 = 1131{,}27$$ //

Böylece; $\mu_4 = (1131{,}27) - 4\cdot(4{,}76)\cdot(171{,}89) + 6\cdot(4{,}76)^2\cdot(27{,}43) - 3\cdot(4{,}76)^4$

$$= 47{,}37$$ //

Sonuç olarak basıklık katsayısı,

$$\alpha_4 = \frac{(47{,}37)}{(2{,}18)^4} - 3 = -0{,}9 < 0.$$

X t.d. nin yoğunluk fonk.-nun grafiği normale göre daha basıktır. //